

Probabilidad y Verosimilitud

Clase Teórica 8

Alexandre Aires-da-Silva

Comisión Interamericana del Atún Tropical (CIAT)

Curso de introducción a modelos de dinámica poblacional y
evaluación de recursos marinos

Manta, Ecuador, 5-9 de octubre de 2009



Tópicos



- **Teórica:** Conceptos generales
 - Probabilidad
 - Verosimilitud
- **Laboratorio:** Ajuste del modelo de Schaefer a los datos de CPUE de merluza
 - Método de la máxima verosimilitud
 - Perfil de máxima verosimilitud

Existe variabilidad en la naturaleza

- En el mundo real (naturaleza), los sistemas no son determinísticos, pero si aleatorios (estocásticos)
- Existe variabilidad que debe ser tomada en cuenta:
 - Error de proceso: La variabilidad innata del sistema;
 - Error de observación: No observamos el sistema perfectamente .
- Necesitamos de conocimientos básicos de probabilidad



Poblaciones e muestras



- Población
- Censo
- Muestras y objetivo del muestreo (estimación de parámetros)

Espacio de muestra e eventos

- El espacio de muestra se define como todos los posibles sucesos de un experimento S . Un subconjunto E de S es conocido como un evento
- Si consideráramos un experimento con espacio de muestra S . Para cada evento E del espacio muestra, la probabilidad $P(E)$ del evento E se define por y satisface las siguientes tres condiciones:
 - $0 \leq P(E) \leq 1$
 - $P(S) = 1$
 - Para cualquier $E_1, E_2 \dots$ En mutuamente exclusivos:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$



VARIABLES ALEATORIAS



- *Variable aleatoria*: es una variable que puede tomar más de un valor y que estos están determinados por probabilidades
- **Ejemplo**: El ejemplo clásico de tirar una moneda

Distribuciones de probabilidad

- **Distribución de probabilidades:** Una función que representa las distintas probabilidades asociadas a cada valor de la variable de interés



Distribuciones de probabilidad

- Las distribuciones de probabilidad mas comunes en modelado san:
 - Binomial y multinomial
 - Poisson y binomial negativa
 - Normal
 - Log-normal
 - Beta



Distribuciones de probabilidad – Binomial

- Experimentos y resultados discretos
- Surge de un experimento donde existen solo 2 posibles resultados:
 - Una moneda es cara o cruz
 - Un tiburón vive o muere
- Hacemos un numero fijo de experimentos
 - Una serie de lanzamientos de la moneda
 - Un numero de tiburones que puede vivir o morir



La distribución binomial

$$X \sim B(N, p)$$

$$\Pr(X = k | N, p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

- X es el numero observado de resultados
- N es el numero de experimentos
- P es la probabilidad del que el evento ocurra en un dado experimento

Distribuciones de probabilidad – Poisson

- Resultados discretos, numero continuo de observaciones

$$\Pr(X = k) = \frac{e^{-r} r^k}{k!}$$

- r es el numero esperado de ocurrencias de un evento
- k es el numero de ocurrencias de un evento



Distribuciones de probabilidad – Uniforme

- Es una distribución continua donde existe la misma probabilidad en todo el intervalo

$$\Pr(X) = \frac{1}{b - a}$$

$$X \sim \text{Unif}(a, b)$$



Distribuciones de probabilidad – normal

- Distribución continua de probabilidades de forma Gaussiana e con dos parámetros: μ , σ^2
- Ampliamente utilizada

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- μ es el valor promedio
- σ^2 es la varianza



Distribuciones de probabilidad – lognormal

- Distribución continua e asimétrica con los mismos parámetros que la distribución normal

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \ln(\mu))^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Muchos índices de abundancia (CPUE) tienen una distribución lognormal



Verosimilitud



Verosimilitud

- *Método de Máxima Verosimilitud* – método general de estimación de parámetros propuesto por R. A. Fisher en los años 20
 - Mirar los valores de la muestra aleatoria
 - El valor del parámetro/s (hipótesis) de máxima verosimilitud (mas verosímil) es aquel valor/es que maximice la probabilidad de observar la muestra



En probabilidad...



- Los valores de los parámetros son conocidos y con estos calculamos la probabilidad de que un evento suceda
- En notación matemática, la probabilidad de observar datos Y_i dado un valor particular del parámetro p es:

$$P\{Y_i | p\}$$

- Pueden existir varios eventos posibles Y_i , pero uno solo valor del parámetro p
- La pregunta que hacemos es: ¿qué probable son los datos Y_i dados ciertos parámetros (p)?



En verosimilitud...

- Conocemos los datos (Y_i) pero no las hipótesis (parámetros, ρ)
- Contrariamente a probabilidad, confrontamos parámetros (hipótesis alternativas) con los datos
- Deseamos conocer que tanto suportan los datos (eventos) las hipótesis alternativas (valores de los parámetros)
- La pregunta es: ¿que verosímil ("probable") son ciertas hipótesis (valores de los parámetros, ρ) datos los datos?
- Matemáticamente, expresamos verosimilitud en la forma:

$$L\{datos \mid hipotesis\} \quad L\{Y \mid p_i\}$$

Probabilidad y Verosimilitud



Probabilidad

- Expresión matemática:

$$P\{datos \mid hipotesis\}$$

$$P\{Y_i \mid p\}$$

- La pregunta:

¿que probable son los datos Y_i
dados ciertos parámetros (p)?

Verosimilitud

- Expresión matemática:

$$L\{datos \mid hipotesis\}$$

$$L\{Y \mid p_i\}$$

- La pregunta:

¿que verosímil (“probable”) son
ciertas hipótesis (parámetros, p)
dados los datos?

¿Como calculamos la verosimilitud?



- Con las mismas ecuaciones para las distribuciones de probabilidades
- La probabilidad e verosimilitud son conceptualmente diferentes, pero matemáticamente iguales